Open Access Library Journal
2025, Volume 12, e12789
ISSN Online: 2333-9721
ISSN Print: 2333-9705

Multiway Generalization of Euler Proposition

Zhongqi Zhou

Hubei Coal Geology Bureau, Wuhan, China
Email: zhouzongqi1058@163.com

How to cite this paper: Zhou, Z.Q. (2025) Multiway Generalization of Euler Proposition. *Open Access Library Journal*, **12**: e12789.
https://doi.org/10.4236/oalib.1112789

Received: December 8, 2024
Accepted: February 23, 2025
Published: February 26, 2025

Abstract

In this paper, the multiway extension of the Euler proposition is presented. By means of inductive reasoning, it is proved that there are positive integer solutions to five kind of indefinite equations, and the uniqueness of the solution of the indefinite equations in these propositions is demonstrated. Three related conjectures are proposed. Finally, the general method to understand these indeterminate equations is pointed out.

Subject Areas

Integral Equation, Number Theory

Keywords

Indefinite Equation, Generalization of Euler Proposition, Induction, Positive Integer Solution, Conjecture

1. 引言

欧拉命题：如果 $n \ge 3$ 是自然数，那么 $2^n = 7x^2 + y^2$。其中 x 和 y 都是奇数。

1990 年，苏联数学家 T.库安格证明了这个命题[1]。

作者对以上命题进行了多向推广，并证明了以下 5 个命题：

1) 如果 $n \ge 1, m \ge 3$ 均为给定的自然数， x, y 都是奇数，则不定方程

$$\left(2^m - 1\right)x^2 + y^2 = 2^{(m-2)n+2}$$

有唯一一组正整数解。

以上不定方程中，如果 $m = 3, n \ge 1$ 时就是欧拉命题。(欧拉命题没有方程只有唯一解的结论)

2) 如果 $p, q > 1$ 均为给定的奇数， $p + q = 2^i, i \ge 3, n \ge 1$ 均为给定的自然数， x, y 都是奇数，则不定方程

$$px^2+qy^2=2^{(2i-4)n-(i-4)}$$

有唯一一组正整数解。

3) 如果 $p,q>1$ 均为给定的奇数， $p+q=2^i, i\ge 3, n\ge 1$ 均为给定的自然数， x,y 都是奇数，则不定方程

$$pqx^2+y^2=2^{(2i-4)n+2}$$

有唯一一组正整数解。

4) 如果 $n\ge 1, m\ge 2$ 均为给定的自然数， x,y 都是正整数， $r>1$ 为奇数， $\left(\left(r^m-1\right)x^2,y^2\right)=1$。则不定方程

$$\left(r^m-1\right)x^2+y^2=r^{nm}$$

有唯一一组正整数解。

5) 如果 $p,q>1$ 均为给定的正整数，$p+q=r^i, i\ge 2, n\ge 1$ 均为给定的自然数， $r>2$ 为奇数， x,y 都是正整数，$\left(px^2,qy^2\right)=1$，则不定方程

$$px^2+qy^2=r^{(2n-1)i}$$

有唯一一组正整数解。

2. 引理

引理 1. 设 x,y 均为奇数，则

1) 若 $x+y=2^k s, k>1$，则 $x-y=2t$；

2) 若 $x-y=2^k s, k>1$，则 $x+y=2t$；

3) 若 $x-y=0$，则 $x+y=2t$。

式中 s,t 均为奇数。

证：分别令 $x,y\equiv 1 \pmod 4$，

或令 $x,y\equiv -1 \pmod 4$，

或令 $x\equiv 1 \pmod 4, y\equiv -1 \pmod 4$，

或令 $x=y$，

即可得到以上结果。

引理 2. 设 a,b,A,B 均为正整数， $q>1$ 为自然数， $r>1$ 为奇数，$\left(qa^2,b^2\right)=1$， $\left(qA^2,B^2\right)=1$，

令 $L=aB+bA$， $M=aB-bA$， $N=paA+qbB$， $O=paA-qbB$。则

1) 如果 $r\mid L, r\mid M$，则 $r\nmid N, r\nmid O$。

2) 如果 $r\mid N, r\mid O$，则 $r\nmid L, r\nmid M$。

3) 如果 $r\nmid aB, r\nmid bA$，但 $r\mid aB+bA$，则 $r\nmid aB-bA$。

4) 如果 $r\nmid aB, r\nmid bA$，但 $r\mid aB-bA$，则 $r\nmid aB+bA$。

5) 如果 $r\nmid paA, r\nmid qbB$，但 $r\mid paA+qbB$，则 $r\nmid paA-qbB$。

6) 如果 $r\nmid paA, r\nmid qbB$，但 $r\mid paA-qbB$，则 $r\nmid paA+qbB$。

证：1) 如果 $r\mid L, r\mid M$ 则 $r\mid aB$ 并 $r\mid bA$，得 $r\mid aB+bA=L$。此时如果 $r\mid N$ 或 $r\mid O$ 则必有 $r\mid a$ 和 $r\mid b$ 或 $r\mid A$ 和 $r\mid B$。此与 $\left(qa^2,b^2\right)=1, \left(qA^2,B^2\right)=1$ 矛盾。

2) 如果 $r|N, r|O$ 则 $r|paB$ 并 $r|qbB$，得 $r|paA+qbB=N$。此时如果 $r|L$ 或 $r|M$ 则必有 $r|a$ 和 $r|b$ 或 $r|A$ 和 $r|B$。此与 $\left(qa^2, b^2\right)=1$ 或 $\left(qA^2, B^2\right)=1$ 矛盾。

3) 如果 $r\nmid aB, r\nmid bA$，又 $r|aB+bA, r|aB-bA$。推出：$r|aB$ 和 $r|bA$ 矛盾。

4) 与 3)同理。

5) 如果 $r\nmid paA, r\nmid qbB$，又 $r|paA+qbB$ 且 $r|paA-qbB$，推出：$r|paA$ 和 $r|qbB$ 矛盾。

6) 与 5)同理。

3. 定理

定理 1. (欧拉命题的推广)如果 $n\geq 1, m\geq 3$ 均为给定的自然数，x, y 都是奇数，则不定方程

$$\left(2^m-1\right)x^2+y^2=2^{(m-2)n+2} \tag{1}$$

有唯一一组正整数解。

证：1. 问题的分析：假设存在 2 个奇数 x 和 y 满足(1)，将(1)改写成：

$$2^m x^2+\left(y-x\right)\left(y+x\right)=2^{(m-2)n+2}.$$

命：$y-x=2q$，其中 q 是整数，我们有 $2^m x^2+2q\left(2x+2q\right)=2^{(m-2)n+2}$。因此

$$2^{m-2}x^2+qx+q^2=2^{(m-2)n} \tag{2}$$

反之，如果存在整数 x, q (x 是奇数)满足关系式(2)，那么 x 和 $y=2q+x$ 将满足关系式(1)。

2. 用数学归纳法证明(2)式：

1) 当 $n=1$ 时，

$$2^{m-2}x^2+qx+q^2=2^{m-2}.$$

由此可求得 $x=1, q=-1$，因此，当 $n=1$ 时命题成立。

2) 设 $n=k>1$ 时命题成立，即

$$2^{m-2}x^2+qx+q^2=2^{(m-2)k},$$

今证 $n=k+1$ 时(2)成立。

$$x\left(2^{m-2}x+q\right)+q^2=2^{(m-2)k}. \tag{3}$$

令 $2^{m-2}x+q=-t, 2^{m-2}x=-q-t, x=\dfrac{-q-t}{2^{m-2}}$。

(3)可写成：

$$\frac{-q-t}{2^{m-2}}\left(-t\right)+q^2=2^{(m-2)k},$$

或

$$2^{m-2}q^2+qt+t^2=2^{(m-2)(k+1)}.$$

这就是说，$n=k+1$ 时(2)成立。因此，由(1)，(2)可知，我们证明了对于

任意自然数 $n\ge 1$，存在两个数 x(x 为奇数)和 q 满足(2)式，再由问题的分析，从而证明了(1)有正整数解。

3. 再证(1)有唯一正整数解：

令 $d=2^{(m-2)n+2},\beta=2^m-1$。

若 d 可同时表示为 $d=\beta a^2+b^2$ 和 $d=\beta A^2+B^2$，其中，a,b,A,B 均为正奇数。

$$d^2=\left(\beta a^2+b^2\right)\left(\beta A^2+B^2\right)=\left(\beta aA\pm bB\right)^2+\beta\left(aB\mp bA\right)^2 \tag{4}$$

$$\begin{aligned}&\left(\beta Aa+bB\right)\left(aB+bA\right)\\&=AB\left(\beta a^2+b^2\right)+ab\left(\beta A^2+B^2\right)=\left(AB+ab\right)d\equiv 0\left(\operatorname{mod} d\right)\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\left(\beta Aa-bB\right)\left(aB-bA\right)\\&=AB\left(\beta a^2+b^2\right)-ab\left(\beta A^2+B^2\right)=\left(AB-ab\right)d\equiv 0\left(\operatorname{mod} d\right)\end{aligned} \tag{6}$$

根据(5)知：$d\left|\beta Aa+bB\right.$ 或 $d\left|Ab+aB\right.$，或 $d\nmid\beta Aa+Bb,d\nmid aB+bA$，但

$$d\left|\left(\beta Aa+bB\right)\left(aB+bA\right)\right. \tag{7}$$

根据(6)知：

$d\left|\beta Aa-bB\right.$ 或 $d\left|Ab-aB\right.$，或 $d\nmid\beta Aa-Bb,d\nmid aB-bA$，但

$$d\left|\left(\beta Aa-bB\right)\left(aB-bA\right)\right. \tag{8}$$

下面证明 $d=\beta Aa+bB,aB-bA=0$。

若 $d\left|aB+Ab\right.$，因 $aB+bA\ge d>0$，(4)不成立。

若 $d\nmid\beta Aa+bB,d\nmid aB+bA$，但 $d\left|\left(\beta Aa+bB\right)\left(Ab+aB\right)\right.$，根据(4)则必有：

$\beta Aa+bB=2^j\times s$，$aB-bA=2^j\times t$，$s,t>1$均为奇数，$j<\left(m-2\right)n+2$。

若 $d\left|\beta Aa-bB\right.$，因 $\left|\beta Aa-bB\right|\ge d>0$，(4)不成立。

若 $d\nmid\beta Aa-bB,d\nmid aB-bA$，但 $d\left|\left(\beta Aa-bB\right)\left(Ab-aB\right)\right.$，根据(4)则必有：

$\beta Aa-bB=2^j\times s$，$aB+bA=2^j\times t$，$s,t>1$均为奇数，$j<\left(m-2\right)n+2$。

根据引理 1 知：$aB-bA=2l$ 或 $aB+bA=2m$，或 $aB-bA=0$，l,m 为奇数。

若 $aB+bA=2m$，

则 $\left(\beta Aa+bB\right)\left(aB+bA\right)=2^{j+1}\times s\times m$，根据(7)可得：$2^{(m-2)n+2}\left|2^{j+1}\right.$，即 $\frac{d}{2}\le 2^j,d<2^j\times s$

所以(4)不成立。

若 $aB-bA=2l$，

$\left(\beta Aa-bB\right)\left(aB-bA\right)=2^{j+1}\times s\times l$，根据(8)可得：$2^{(m-2)n+2}\left|2^{j+1}\right.$，即 $\frac{d}{2}\le 2^j,d<2^j\times s$。所以(4)不成立。

只有 $d\left|\beta Aa+bB\right.$ 和 $d\left|aB-bA\right.$，因 $\beta Aa+bB\ge d>0$，根据(4)知：$d=\beta Aa+bB$，$aB-bA=0$。从而 $bA=aB$，$\frac{\beta a^2}{\beta A^2}=\frac{b^2}{B^2}$，$\frac{\beta a^2+b^2}{\beta A^2+B^2}=\frac{d}{d}=1$。得 $a=A,b=B$。

定理 2. (欧拉命题的推广)如果 $p,q>1$ 均为给定的奇数，$p+q=2^i, i\geq 3, n\geq 1$ 均为给定的自然数， x,y 都是奇数，则不定方程

$$px^2+qy^2=2^{(2i-4)n-(i-4)} \tag{9}$$

有唯一一组正整数解。

证：1. 问题的分析：假设存在 2 个奇数 x 和 y 满足(9)，将(9)改写成：

$$2^i x^2+q(y-x)(y+x)=2^{(2i-4)n-(i-4)}.$$

命： $y-x=2s$，其中 s 是整数，我们有 $2^i x^2+2qs(2x+2s)=2^{(2i-4)n-(i-4)}$。因此

$$2^{i-2}x^2+qsx+qs^2=2^{(2i-4)n-(i-2)} \tag{10}$$

反之，如果存在整数 x,s (x 是奇数)满足关系式(10)，那么 x 和 $y=2s+x$ 将满足关系式(9)。

2. 用数学归纳法证明(10)式：

1) 当 $n=1$ 时，

$$2^{i-2}x^2+qsx+qs^2=2^{i-2}.$$

由此可求得 $x=1, s=-1$，因此，当 $n=1$ 时命题成立。

2) 设 $n=k>1$ 时命题成立，即

$$2^{i-2}x^2+qsx+qs^2=2^{(2i-4)k-(i-2)},$$

今证 $n=k+1$ 时(10)成立。

$$x\left(2^{i-2}x+qs\right)+qs^2=2^{(2i-4)k-(i-2)}. \tag{11}$$

令 $2^{i-2}x+qs=-t, x=\dfrac{-t-qs}{2^{i-2}}$，

(11)可写成：

$$\frac{-qs-t}{2^{i-2}}(-t)+qs^2=2^{(2i-4)k-(i-2)},$$

或

$$2^{i-2}qs^2+qst+t^2=2^{(2i-4)k}.$$

$$2^{i-2}t^2+qt\left(2^{i-2}s\right)+q\left(2^{i-2}s\right)^2=2^{(2i-4)(k+1)-(i-2)}$$

令 $h=2^{i-2}s$，上式可变成：

$$2^{i-2}t^2+qth+qh^2=2^{(2i-4)(k+1)-(i-2)}$$

这就是说， $n=k+1$ 时(10)成立。因此，由(9)、(10)可知，我们证明了对于任意自然数 $n\geq 1$，存在两个数 x(x 为奇数)和 s 满足(10)式，再由问题的分析，从而证明了(9)有正整数解。

3. 再证(9)有唯一正整数解：

令 $d=2^{(2i-4)n-(i-4)}$，

若 d 可同时表示为 $d=pa^2+qb^2$ 和 $d=pA^2+qB^2$，其中 a,b,A,B 均为奇数。

$$d^2=\left(pa^2+qb^2\right)\left(pA^2+qB^2\right)=\left(paA\pm qbB\right)^2+pq\left(Ab\mp Ba\right)^2 \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\left(pAa+qbB\right)\left(Ab+aB\right)\\&=\left(pa^2+qb^2\right)AB+\left(pA^2+qB^2\right)ab=\left(AB+ab\right)d\equiv 0\left(\operatorname{mod} d\right)\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\left(pAa-qbB\right)\left(Ab-aB\right)\\&=\left(pa^2+qb^2\right)AB-\left(pA^2+qB^2\right)ab=\left(AB-ab\right)d\equiv 0\left(\operatorname{mod} d\right)\end{aligned} \tag{14}$$

根据(13)知：

$d\,|\,pAa+qbB$ 或 $d\,|\,Ab+aB$，或 $d\nmid pAa+qbB, d\nmid aB+Ab$ 但

$$d\,|\left(pAa+qbB\right)\left(Ab+Ba\right) \tag{15}$$

根据(14)知：

$d\,|\,pAa-qbB$，或 $d\,|\,Ab-aB$，或 $d\nmid pAa-qbB, d\nmid aB-Ab$ 但

$$d\,|\left(pAa-qbB\right)\left(Ab-Ba\right) \tag{16}$$

下面证明 $d=pAa+qbB, Ab-Ba=0$。

若 $d\,|\,Ab+aB$，因 $Ab+aB\ge d>0$，(12)不成立。

若 $d\nmid pAa+qbB, d\nmid Ab+Ba$，但 $d\,|\left(pAa+qbB\right)\left(Ab+aB\right)$，根据(12)则必有：

$pAa+qbB=2^j\times s$， $Ab-Ba=2^j\times t$， $s,t>1$ 均为奇数，$j<\left(2i-4\right)n-\left(i-4\right)$。

若 $d\,|\,pAb-qaB$，因 $\left|pAb-qBa\right|\ge d>0$。(12)不成立。

若 $d\nmid pAa-qbB, d\nmid Ab-Ba$，但 $d\,|\left(pAa-qbB\right)\left(Ab-aB\right)$，根据(12)必有：

$pAa-qbB=2^j\times s$， $aB+bA=2^j\times t$， $s,t>1$ 均为奇数，$j<\left(2i-4\right)n-\left(i-4\right)$。

根据引理 1 知：$aB-bA=2l$ 或 $aB+bA=2m$ 或 $aB-bA=0$，l,m 为奇数。

若 $aB+bA=2m$，

则 $\left(pAa+qbB\right)\left(aB+bA\right)=2^{j+1}\times s\times m$，根据(15)可得：

$2^{(2i-4)n-(i-4)}\,\big|\,2^{j+1}$，即 $\frac{d}{2}\le 2^j, d<2^j\times s$。所以(12)不成立。

若 $Ab-Ba=2l$，

则 $\left(pAa-qbB\right)\left(Ab-Ba\right)=2^{j+1}\times s\times l$，根据(16)可得： $2^{(2i-4)n-(i-4)}\,\big|\,2^{j+1}$，

即 $\frac{d}{2}\le 2^j, d<2^j\times s$。所以(12)不成立。

只有 $d\,|\,pAa+qbB$ 和 $d\,|\,aB-bA$，因 $pAa+qbB\ge d>0$，根据(12)知：

$$d=pAa+qbB, aB-bA=0.$$

从而 $bA=aB$，$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}$，$\frac{pa^2}{pA^2}=\frac{qb^2}{qB^2}=\frac{pa^2+qb^2}{pA^2+qB^2}=\frac{d}{d}=1$。得到 $a=A, b=B$。

定理 3. (欧拉命题的推广)如果 $p,q>1$ 均为给定的奇数，$p+q=2^i, i\ge 3, n\ge 1$ 均为给定的自然数， x,y 都是奇数，则不定方程

$$pqx^2 + y^2 = 2^{(2i-4)n+2} \tag{17}$$

有唯一一组正整数解。

证：1. 问题的分析：不妨假设 $p = 2^{i-1} + s, q = 2^{i-1} - s, s$ 为奇数，并假定存在 2 个奇数 x 和 y 满足(17)，将(17)改写成：

$$2^{2i-2}x^2 + (y - sx)(y + sx) = 2^{(2i-4)n+2}.$$

命：$y - sx = 2h$，其中 h 是整数，我们有 $2^{2i-2}x^2 + 2h(2sx + 2h) = 2^{(2i-4)n+2}$。因此

$$2^{2i-4}x^2 + hsx + h^2 = 2^{(2i-4)n} \tag{18}$$

反之，如果存在整数 x, h (x 是奇数)满足关系式(18)，那么 x 和 $y = 2h + sx$ 将满足关系式(17)。

2. 用数学归纳法证明(18)式：

1) 当 $n = 1$ 时，

$$2^{2i-4}x^2 + hsx + h^2 = 2^{2i-4}.$$

由此可求得 $x = 1, h = -s$，因此，当 $n = 1$ 时命题成立。

2) 设 $n = k > 1$ 时命题成立，即

$$2^{2i-4}x^2 + hsx + h^2 = 2^{(2i-4)k},$$

也就是

$$x\left(2^{2i-4}x + hs\right) + h^2 = 2^{(2i-4)k}. \tag{19}$$

今证 $n = k + 1$ 时(18)成立。

令 $2^{2i-4}x + hs = -t, x = \dfrac{-t - hs}{2^{2i-4}}$。

(19)可写成：

$$\frac{-hs - t}{2^{2i-4}}(-t) + h^2 = 2^{(2i-4)k},$$

或

$$2^{2i-4}h^2 + hst + t^2 = 2^{(2i-4)(k+1)}.$$

这就是说，$n = k + 1$ 时(18)成立。因此，由(17)，(18)可知，我们证明了对于任意自然数 $n \geq 1$，存在两个数 x(x 为奇数)和 h 满足(18)式，再由问题的分析，从而证明了(17)有正整数解。

3. 再证(17)有唯一正整数解：

令 $\beta = (2i-4)n + 2, d = 2^{\beta}$。

若 d 可同时表示为 $d = pqa^2 + b^2$ 和 $d = pqA^2 + B^2$，其中 a, b, A, B 均为正奇数。

$$d^2 = \left(pqa^2 + b^2\right)\left(pqA^2 + B^2\right) = \left(pqaA \pm bB\right)^2 + pq\left(aB \mp bA\right)^2 \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\left(pqAa + bB\right)\left(Ab + aB\right) \\ &= AB\left(pqa^2 + b^2\right) + ab\left(pqA^2 + B^2\right) = ABd + abd \equiv 0 \pmod{d} \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}&\left(pqAa-bB\right)\left(Ab-aB\right)\\&=AB\left(pqa^2+b^2\right)-ab\left(pqA^2+B^2\right)=ABd-abd\equiv 0\left(\bmod d\right)\end{aligned} \tag{22}$$

根据(21)知：

$d\mid pqAa+bB$，或 $d\mid Ab+aB$，或 $d\nmid pqAa+bB, d\nmid Ab+aB$，但

$$d\mid\left(pqAa+bB\right)\left(Ab+Ba\right) \tag{23}$$

根据(22)知：

$d\mid pqAa-bB$，或 $d\mid Ab-aB$，或 $d\nmid pqAa-bB, d\nmid Ab-Ba$，但

$$d\mid\left(pqAa-bB\right)\left(Ab-Ba\right) \tag{24}$$

下面证明 $d=pqAa+bB, Ab-Ba=0$。

若 $d\mid Ab+aB$，因 $Ab+aB\ge d>0$，(20)不成立。

若 $d\nmid pqAa+bB, d\nmid Ab+Ba$，但 $d\mid\left(pqAa+bB\right)\left(Ab+aB\right)$，根据(20)则必有：

$pqAa+bB=2^j\times s$，$Ab-Ba=2^j\times t$，$s,t>1$ 均为奇数，$j<\beta$。

若 $d\mid pqAa-bB$，因 $\left|pqAa-bB\right|\ge d>0$，(20)不成立。

若 $d\nmid pqAa-bB, d\nmid Ab-Ba$，但 $d\mid\left(pqAa-bB\right)\left(Ab-aB\right)$，根据(20)则必有：

$pqAa-bB=2^j\times s$，$aB+bA=2^j\times t$，$s,t>1$ 均为奇数，$j<\beta$。

根据引理 1 知：$Ab-Ba=2l$ 或 $aB+bA=2m$ 或 $Ab-Ba=0$，l,m 为奇数。

若 $aB+bA=2m$，

则 $\left(pqAa+bB\right)\left(aB+bA\right)=2^{j+1}\times s\times m$，根据(23)可得：

$2^\beta=d\mid 2^{j+1}$，即 $\frac{d}{2}\le 2^j, d<2^j\times s$。所以(20)不成立。

若 $Ab-Ba=2l$，

$\left(pqAa-bB\right)\left(Ab-Ba\right)=2^{j+1}\times s\times l$，根据(24)可得：$2^\beta\mid 2^{j+1}$，

即 $\frac{d}{2}\le 2^j, d<2^j\times s$。所以(20)不成立。

只有 $d\mid pAa+qbB$ 和 $d\mid aB-bA$，因 $pAa+qbB\ge d>0$ 根据(20)知：

$d=pqAa+bB, aB-bA=0$。从而 $bA=aB, \frac{a}{A}=\frac{b}{B}$，

$\frac{pqa^2}{pqA^2}=\frac{b^2}{B^2}=\frac{pqa^2+b^2}{pqA^2+B^2}=\frac{d}{d}=1$。得到 $a=A, b=B$。

定理 4. 如果 $p,q>1$ 均为给定的奇数，$p+q=2^i, i\ge 3, n\ge 1$ 均为给定的自然数，y 是奇数，则不定方程

$$pq+y^2=2^x \tag{25}$$

有唯一一组正整数解：$x=2i-2, y=\left|2^{i-1}-p\right|$，

证：因 $p+q=2^i$，所以，不妨设 $p=2^{i-1}-s, q=2^{i-1}+s$，

(25)可变形为：

$$2^{2i-2}-s^2=2^x-y^2,$$

可得：$s=\left|2^{i-1}-p\right|, y=s=\left|2^{i-1}-p\right|, x=2i-2$。

定理 5. (欧拉命题的推广)如果 $n\ge 1, m\ge 2$ 均为给定的自然数，x, y 都是正整数，$r>1$ 为奇数，则不定方程

$$\left(r^m-1\right)x^2+y^2=r^{nm} \tag{26}$$

有唯一一组正整数解。

证：1. 问题的分析：假设存在 2 个正整数 x 和 y 满足(26)，将(26)改写成：

$$r^m x^2+\left(y-x\right)\left(y+x\right)=r^{nm}.$$

命：$y-x=q$，其中 q 是整数，我们有 $r^m x^2+q\left(2x+q\right)=r^{nm}$。

因此

$$r^m x^2+2qx+q^2=r^{nm} \tag{27}$$

反之，如果存在整数 x, q 满足关系式(27)，那么 x 和 $y=q+x$ 将满足关系式(26)。

2. 用数学归纳法证明(27)式：

当 $n=1$ 时，

$$r^m x^2+2qx+q^2=r^m.$$

由此可求得 $x=1, q=-2$，因此，当 $n=1$ 时命题成立。

设 $n=k>1$ 时命题成立，即

$$r^m x^2+2qx+q^2=r^{mk},$$

今证 $n=k+1$ 时(27)成立。

$$x\left(r^m x+2q\right)+q^2=r^{mk}. \tag{28}$$

令 $r^m x+2q=-t, r^m x=-2q-t, x=\dfrac{-2q-t}{r^m}$。

(28)可写成：

$$\frac{-2q-t}{r^m}\left(-t\right)+q^2=r^{mk},$$

或

$$r^m q^2+2qt+t^2=r^{mk+m}=r^{m(k+1)}.$$

这就是说，$n=k+1$ 时(27)成立。因此，由(26)，(27)可知，我们证明了对于任意自然数 $n\ge 1$，存在两个数 x 和 q 满足(27)式，再由问题的分析，从而证明了(26)有正整数解。

3. 再证(26)有唯一正整数解：

令 $d=r^{mn}, \beta=r^m-1$。

若 d 可同时表示为 $d=\beta a^2+b^2$ 和 $d=\beta A^2+B^2$，其中 a, b, A, B 均为正整数。

$$d^2=\left(\beta a^2+b^2\right)\left(\beta A^2+B^2\right)=\left(\beta aA\pm bB\right)^2+\beta\left(aB\mp bA\right)^2 \tag{29}$$

$$\begin{aligned}&\left(\beta Aa+bB\right)\left(aB+bA\right)\\&=AB\left(\beta a^2+b^2\right)+ab\left(\beta A^2+B^2\right)=\left(AB+ab\right)d\equiv 0\left(\operatorname{mod} d\right)\end{aligned} \tag{30}$$

$$
\begin{aligned}
&(\beta Aa-bB)(aB-bA)\\
&=AB(\beta a^2+b^2)-ab(\beta A^2+B^2)=(AB-ab)d\equiv 0(\bmod d)
\end{aligned} \tag{31}
$$

根据(30)知：

$d\,|\,\beta Aa+bB$ 或 $d\,|\,Ab+aB$ 或 $d\nmid\beta Aa+bB, d\nmid Ab+aB$，但

$$d\,|\,(\beta Aa+bB)(aB+bA)$$

根据(31)知：

$d\,|\,\beta Aa-bB$，或 $d\,|\,Ab-aB$，或 $d\nmid\beta Aa-Bb, d\nmid Ab-Ba$，但

$$d\,|\,(\beta Aa-bB)(aB-bA)$$

下面证明 $d=\beta Aa+bB, aB-bA=0$。

若 $d\,|\,Ab+aB$，因 $Ab+aB\geq d>0$，(29)不成立。

若 $d\nmid\beta Aa+bB, d\nmid Ab+Ba$，但 $d\,|\,(\beta Aa+bB)(Ab+aB)$，根据(29)则必有：

$\beta Aa+bB=r^j\times s, Ab-Ba=r^j\times t, s,t>1,(st,r)=1.\ j<(2n-1)i.$

若 $d\,|\,\beta Ab-aB$，因 $|\beta Ab-aB|\geq d>0$，(29)不成立。

若 $d\nmid\beta Aa-bB, d\nmid Ab-Ba$，但 $d\,|\,(\beta Aa-bB)(Ab-aB)$，根据(29)则必有：

$\beta Aa-bB=r^j\times s, aB+bA=r^j\times t, s,t>1,(st,r)=1.\ j<(2k-1)i.$

根据引理 2 知：$r\nmid aB-bA$ 或 $r\nmid aB+bA$。

若 $r\nmid aB+bA$，

则 $(\beta Aa+bB)(aB+bA)=r^j\times s\times t$，根据(30)可得：

$d\,|\,r^j$，此不可。所以(29)不成立。

若 $r\nmid aB-Ab$，

则 $(\beta Aa-bB)(aB-Ab)=r^j\times s\times t$，根据(31)可得：$d\,|\,r^j$，

此不可，所以(29)不成立。

如果 $r\,|\,aB+bA$ 且 $r\,|\,\beta Aa+bB$，则根据引理 2 知 $r\nmid(\beta aA-bB)(bA-aB)$。(31)不成立。

如果 $r\,|\,aB-bA$ 且 $r\,|\,\beta Aa-bB$，则根据引理 2 知 $r\nmid(\beta aA+bB)(bA+aB)$。(30)不成立。

只有 $d\,|\,\beta Aa+bB$ 和 $d\,|\,aB-bA$，因 $\beta Aa+bB\geq d>0$，根据(29)知：

$d=\beta Aa+bB, aB-bA=0.$

从而 $bA=aB$，$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}$，$\frac{\beta a^2}{\beta A^2}=\frac{b^2}{B^2}=\frac{\beta a^2+b^2}{\beta A^2+B^2}=\frac{d}{d}=1$。得到：

$$a=A, b=B.$$

定理 6. (欧拉命题的推广)如果 $p,q>1$ 均为给定的正整数，$p+q=r^i, i\geq 2, n\geq 1$ 均为给定的自然数，$r>2$ 为奇数，x,y 都是自然数，$(px^2,qy^2)=1$，则不定方程

$$px^2+qy^2=r^{(2n-1)i} \tag{32}$$

有唯一一组正整数解。

证：1. 问题的分析：假设存在 2 个正整数 x 和 y 满足(32)，将(32)改写成：

$$r^i x^2 + q(y-x)(y+x) = r^{(2n-1)i}.$$

命： $y-x=s$，其中 s 是整数，我们有 $r^i x^2 + qs(2x+s) = r^{(2n-1)i}$ 。

因此

$$r^i x^2 + 2qsx + qs^2 = r^{(2n-1)i} \tag{33}$$

反之，如果存在整数 x, s 满足关系式(33)，那么 x 和 $y = s + x$ 将满足关系式(32)。

2. 用数学归纳法证明(33)式：

1) 当 $n=1$ 时，

$$r^i x^2 + 2qsx + qs^2 = r^i.$$

由此可求得 $x=1, s=-2$，因此，当 $n=1$ 时命题成立。

2) 设 $n=k>1$ 时命题成立，即

$$r^i x^2 + 2qsx + qs^2 = r^{(2k-1)i},$$

今证 $n=k+1$ 时(33)成立。

$$x\left(r^i x + 2qs\right) + qs^2 = r^{(2k-1)i}. \tag{34}$$

令 $r^i x + 2qs = -t, x = \dfrac{-t-2qs}{r^i}$，

(34)可写成：

$$\frac{-2qs-t}{r^i}(-t) + qs^2 = r^{(2k-1)i},$$

或

$$r^i qs^2 + 2qst + t^2 = r^{(2k-1)i+i}.$$

$$r^i t^2 + 2qt\left(r^i s\right) + q\left(r^i s\right)^2 = r^{(2k-1)i+2i} = r^{(2(k+1)-1)i}$$

令 $h = 2^i s$，上式可写成：

$$r^i t^2 + 2qth + qh^2 = r^{(2(k+1)-1)i}$$

这就是说，$n=k+1$ 时(33)成立。因此，由(32)，(33)可知，我们证明了对于任意自然数 $n \ge 1$，存在两个数 x 和 s 满足(33)式，再由问题的分析，从而证明了(32)有正整数解。

3. 再证(32)有唯一正整数解：

令 $d = r^{(2k-1)i}$，

若 d 可同时表示为 $d = pa^2 + qb^2$ 和 $d = pA^2 + qB^2$，其中 a, b, A, B 均为正整数。

$$d^2 = \left(pa^2 + qb^2\right)\left(pA^2 + qB^2\right) = \left(paA \pm qbB\right)^2 + pq\left(Ab \mp Ba\right)^2 \tag{35}$$

$$\begin{aligned}&\left(pAa+qbB\right)\left(Ab+aB\right)\\&=\left(pa^2+qb^2\right)AB+\left(pA^2+qB^2\right)ab=\left(AB+ab\right)d\equiv 0\left(\operatorname{mod} d\right)\end{aligned}\tag{36}$$

$$\begin{aligned}&\left(pAa-qbB\right)\left(Ab-aB\right)\\&=\left(pa^2+qb^2\right)AB-\left(pA^2+qB^2\right)ab=\left(AB-ab\right)d\equiv 0\left(\operatorname{mod} d\right)\end{aligned}\tag{37}$$

根据(36)知：

$d\mid pAa+qbB$ 或 $d\mid Ab+aB$ 或 $d\nmid\left(pAa+qbB\right), d\nmid Ab+Ba$，但

$$d\mid\left(pAa+qbB\right)\left(aB+bA\right)\tag{38}$$

根据(37)知：

$d\mid pAa-qbB$ 或 $d\mid Ab-aB$ 或 $d\nmid\left(pAa-qbB\right), d\nmid Ab-Ba$，但

$$d\mid\left(pAa-qbB\right)\left(bA-aB\right)\tag{39}$$

下面证明 $d=pAa+qbB, Ab-Ba=0$。

若 $d\mid Ab+aB$，因 $Ab+aB\geq d>0$，(35)不成立。

若 $d\nmid pAa+qbB, d\nmid Ab+Ba$，但 $d\mid\left(pAa+qbB\right)\left(Ab+aB\right)$，根据(35)则必有：

$pAa+qbB=r^j\times s, Ab-Ba=r^j\times t, s,t>1,\left(st,r\right)=1.\ j<\left(2n-1\right)i.$

若 $d\mid pAb-qaB$，因 $\left|pAb-qaB\right|\geq d>0$，(35)不成立。

若 $d\nmid pAa-qbB, d\nmid Ab-Ba$，但 $d\mid\left(pAa-qbB\right)\left(Ab-aB\right)$，根据(35)则必有：

$pAa-qbB=r^j\times s, aB+bA=r^j\times t, s,t>1,\left(st,r\right)=1.\ j<\left(2k-1\right)i.$

根据引理 2 知：$r\nmid aB-bA$ 或 $r\nmid aB+bA$。

若 $r\nmid aB+bA$，

则 $\left(pAa+qbB\right)\left(aB+bA\right)=r^j\times s\times t$，根据(38)可得：

$r^{(2n-1)i}\mid r^j$，此不可。所以(35)不成立。

若 $r\nmid aB-Ab$，

则 $\left(pAa-qbB\right)\left(aB-Ab\right)=r^j\times s\times t$，根据(39)可得：$2^{(2n-1)i}\mid 2^j$，

此不可，所以(35)不成立。

如果 $r\mid aB+bA$ 且 $r\mid pAa+qbB$，则根据引理 2 知 $r\nmid\left(paA-qbB\right)\left(aB-bA\right)$。(37)不成立。

如果 $r\mid aB-bA$ 且 $r\mid pAa-qbB$，则根据引理 2 知 $r\nmid\left(paA+qbB\right)\left(bA+aB\right)$。(36)不成立。

只有 $d\mid pAa+qbB$ 和 $d\mid aB-bA$，因 $pAa+qbB\geq d>0$，根据(35)知：

$$d=pAa+qbB, aB-bA=0.$$

从而 $bA=aB$，$\dfrac{a}{A}=\dfrac{b}{B}$，$\dfrac{pa^2}{pA^2}=\dfrac{qb^2}{qB^2}=\dfrac{pa^2+qb^2}{pA^2+qB^2}=\dfrac{d}{d}=1$。得到：

$$a=A, b=B.$$

定理 7. 如果 $r,p,q>2$ 均为给定的奇数，$p+q=2\times r^i, i\geq 2$ 为给定的自然数，$x,y\in N$。

则不定方程

$$pq + y^2 = r^x \tag{40}$$

有唯一一组正整数解： $x = 2i, y = \left|r^i - p\right|$.

证：因 $p + q = 2 \times r^i$ ，不妨设 $p = r^i - s, q = r^i + s$ ，(40)可变形为：

$$r^{2i} - s^2 = r^x - y^2,$$

可得： $s = \left|r^i - p\right|, y = s = \left|r^i - p\right|, x = 2i$ 。

4. 猜想

1) 若 $q \equiv -1 \pmod 8$ 为给定的自然数，不定方程

$$qx^2 + y^2 = 2^z$$

有使 z 为最小正整数解是： $z = k$ ，则不定方程

$$qx^2 + y^2 = 2^{(k-2)n+2}$$

总有唯一正整数解。式中， $n \ge 1$ 为给定的自然数。

此猜想已验证到 $q = 5007$ 。

2) 若 $x, y, p, q \ge 2$ 为整数， $k, r \ge 1$ 为给定的整数，则不定方程

$$y^p - \left(\left(2^{2k} - 1\right)x\right)^q = 2^{2kr+2}$$

有唯一一组正整数解： $\begin{cases} y = 2^{2kr} + 1 \\ x = \dfrac{2^{2kr} - 1}{2^{2k} - 1} \\ p = q = 2 \end{cases}$

此猜想已验证到 $x, y = 10000, k = 10, p, q = 15$ 。

3) 若 $x, y, p, q \ge 2$ 为整数， $k, r \ge 1$ 为给定的整数，则不定方程

$$y^p - \left(\left(2^{2k-1} + 1\right)x\right)^q = 2^{2(2k-1)r+2}$$

有唯一一组正整数解： $\begin{cases} y = 2^{2(2k-1)r} + 1 \\ x = \dfrac{2^{2(2k-1)r} - 1}{2^{2k-1} + 1} \\ p = q = 2 \end{cases}$

此猜想已验证到 $x, y = 10000, k = 10, p, q = 15$ 。

5. 结束语

文中的五个命题都是二元二次不定方程有无正整数解的判定问题，至于二元二次不定方程的求解问题在理论上已经解决了[2]，但在实际求解不定方程中，对于大数的分解问题还尚未完全解决，所以对以上几个不定方程当 r^n 很大时，求其解还是很困难的，但从原则上说，不论 r^n 有多大，都是可以用文[3]中的方法来求其解的。下面用两个实际求不定方程的例子来结束本文：

例 1：用文[3]的方法求不定方程$13x^2+115y^2=2^{17}$的正奇数解。

从定理 2 知，此不定方程是存在唯一一组正奇数解的。

解同余式：$13z^2\equiv -115\left(\bmod 2^{17}\right)$得到 2 个小于$\dfrac{2^{17}}{2}$的正整数解：34497，31039。

$\overleftrightarrow{\left(2^{17},34497\right)}_{13\times 34497^2\equiv -115\left(\bmod 2^{17}\right)}$，得到：$r_i=r_4=83, s_i=s_4=19$。

$\overleftrightarrow{\left(2^{17},31039\right)}_{13\times 31039\equiv -115\left(\bmod 2^{17}\right)}$，得到：$r_i=r_4=55, s_i=s_4=740$。

从以上的运算结果可以看出：

$$i=4, 13\times r_i^2=13\times 83^2<2^{17}; 115\times s_i^2=115\times 19^2<2^{17}.$$

$$i=4, 13\times r_i^2=13\times 55^2<2^{17}; 115\times s_i^2=115\times 740^2>2^{17}.$$

所以不定方程的正整数解为：$x=83, y=19$。

例 2：用文[3]的方法求不定方程$124x^2+y^2=5^{12}$的正整数解。

从定理 5 知，此不定方程是存在唯一一组正整数解的。

解同余式：$124z^2\equiv -1\left(\bmod 5^{12}\right)$得到 1 个小于$\dfrac{5^{12}}{2}$的正整数解：106,195,249。

$\overleftrightarrow{\left(5^{12},106195249\right)}_{124\times 106195249^2\equiv -1\left(\bmod 5^{12}\right)}$，得到：$r_i=r_8=492, s_i=s_8=14633$。

从以上的运算结果可以看出：

$$i=8, 124\times r_i^2=124\times 492^2<5^{12}; s_i^2=14633^2<5^{12}.$$

所以不定方程的正整数解为：$x=492, y=14633$。

Conflicts of Interest

The author declares no conflicts of interest.

References

[1] T. 库安格. 一个欧拉命题的简单证明[J]. 数学通讯, 1992(8): 34.

[2] 柯召, 孙琦. 谈谈不定方程[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2011: 15.

[3] Zhou, Z.Q. (2024) The Solution of the Indefinite Equation by the Method ean Algorithm. *Open Access Library Journal*, **11**, e12011. https://doi.org/10.4236/oalib.1112011

Appendix (Abstract and Keywords in Chinese)

欧拉命题的多向推广

摘要：多向推广了欧拉命题，用归纳推理的方式证明了五类不定方程存在正整数解，并对这些命题中不定方程解的唯一性进行了论证。提出了三个相关的猜想。文章最后指出了解这些不定方程的一般方法。

关键词：不定方程，欧拉命题的推广，归纳法，正整数解，猜想